Über die konforme Abbildung Riemannscher Räume mit linearem Zusammenhang

Duchow, Alfred

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 34, 1982, S.33-38

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über die konforme Abbildung Riemannscher Räume mit linearem Zusammenhang

Von **Alfred Duchow,** Vechelde

Vorgelegt von H. R. Müller

(eingegangen am 11. 12. 1981)

Einleitung

Es sei V_n ein n-dimensionaler Riemannscher Raum mit dem positiv definiten, symmetrischen Maßtensor $g_{ij}(x^h)$. Bekanntlich kann man in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit einen linearen Zusammenhang einführen, indem man für ein beliebiges Koordinatensystem (x^i) die Komponenten $G_{ij}{}^k(x^h)$ als Funktionen von (x^h) vorgibt und die transformierten Komponenten $\overline{G}_{ij}{}^k(\bar{x}^h)$ in jedem anderen Koordinatensystem $(\bar{x}^i)$ erklärt durch:

$$(1) \qquad \overline{G}_{ij}{}^k = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^h} G_{pq}{}^h + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^p}.$$

Bezeichnen wir die kovariante Ableitung mit einem unteren Index, der nach einem Komma steht, so gilt für die Richtungsableitung eines längs der Kurve C mit der Parameterdarstellung $x^p(t)$ parallel verschobenen Vektors v^i [2]:

$$(2) \qquad \frac{Dv^i}{dt} = v^i{}_{,p}\, \dot{x}^p = \frac{D(v_q g^{qi})}{dt} = \frac{Dv_q}{dt} g^{qi} + v_q \frac{Dg^{qi}}{dt} = 0.$$

Hieraus folgt durch Überschiebung mit g_{il} und unter Beachtung der Identität

$$(3) \qquad \frac{D\delta^i_k}{dt} = \frac{D(g^{il} g_{lk})}{dt} = \frac{Dg^{il}}{dt} g_{lk} + \frac{Dg_{lk}}{dt} g^{il} = 0$$

für die kovariante Komponente des parallel verschobenen Vektors der Ausdruck:

$$(4) \qquad \frac{Dv_l}{dt} = v^i \frac{Dg_{il}}{dt} = v^i g_{il,p} \dot{x}^p.$$

Eine Übertragung, die bei Parallelverschiebung längs eines beliebigen Weges die Länge jedes beliebigen Vektors konstant läßt, heißt metrisch oder mit der Metrik verträglich. In diesem Fall gilt für die kovariante Ableitung des Maßtensors das Lemma von *Ricci* [2]:

$$(5) \qquad g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - G_{ik}{}^p g_{pj} - G_{jk}{}^p g_{ip} = 0.$$

Zu einem gegebenen Maßtensor g_{ij} lassen sich stets beliebig viele metrische Zusammenhänge $G_{ij}{}^k(x^h)$ als Lösung des singulären linearen Gleichungssystems (5) konstruieren. Allerdings gibt es genau einen symmetrischen, metrischen Zusammenhang in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Dann verschwindet der Torsionstensor $A_{ij}{}^k(x^h)$ nach

(6) $$A_{ij}{}^k := \frac{1}{2}(G_{ij}{}^k - G_{ji}{}^k) = 0,$$

und das lineare Gleichungssystem, bestehend aus (5) und (6), hat als einzige Lösung die Christoffelschen Symbole 2. Art [2]:

(7) $$G_{ij}{}^k = \Gamma_{ij}{}^k := \frac{g^{kp}}{2}\left(\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}\right).$$

Die konforme Abbildung

Zwei n-dimensionale reguläre Riemannsche Räume V_n und $\tilde{V}_n$, die auf die gleichen Koordinatensysteme bezogen seien, sind konform aufeinander abgebildet, wenn mit einer skalaren Ortsfunktion $\sigma = \sigma(x^i)$

(8) $$\tilde{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij} \Leftrightarrow \tilde{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}$$

gilt. Indem man (8) in die Formel (7) für die Christoffelsymbole $\tilde{\Gamma}_{ij}{}^k$ aus $\tilde{V}_n$ einsetzt und entsprechend differenziert, ergibt sich die Beziehung [1]:

(9) $$\tilde{\Gamma}_{ij}{}^k = \Gamma_{ij}{}^k + \delta_i^k \sigma_{,j} + \delta_j^k \sigma_{,i} - g_{ij}\sigma^k$$

mit $\sigma_{,i} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial x^i}$ und $\sigma^k := g^{kp}\sigma_{,p}$.

Das Transformationsgesetz (9) gilt für die von der Metrik abhängigen Christoffelsymbole, jedoch im allgemeinen nicht, wenn an deren Stelle beliebige Funktionen $G_{ij}{}^k(x^l)$ treten. Das Anliegen dieser Arbeit ist es, einen „konformen Zusammenhang in $\tilde{V}_n$" zu definieren, so daß für die Transformation der $G_{ij}{}^k$ eine Verallgemeinerung der Gleichung (9) angegeben werden kann.

Zu diesem Zweck ist es erforderlich, eine lineare Abbildung des Tangentialraumes $T(P_0)$ auf den Tangentialraum $T(\tilde{P}_0)$ zu definieren. Die konforme Abbildung ist bekanntlich dadurch ausgezeichnet, daß Winkel zwischen Kurvenstücken erhalten bleiben. Fordert man, daß das Skalarprodukt beliebiger Vektoren u^i, v^i bei konformer Abbildung invariant ist, so ergibt sich wegen (8) die Transformation der kovarianten und kontravarianten Komponenten zu [3]

(10) $$\tilde{u}^i = e^{-\sigma}u^i, \quad \tilde{v}_j = e^{\sigma}v_j.$$

Mit den bereitgestellten Mitteln sind wir jetzt in der Lage, einen „konformen Zusammenhang bezüglich $G_{ij}{}^k$" zu erklären:

Definition

$V_n, \tilde{V}_n$ seien konforme Riemannsche Räume mit den linearen Zusammenhängen $G_{ij}{}^k$ und $\tilde{G}_{ij}{}^k$. Weiter sei $x^i(t)$ mit $x^i(0) = \underset{(0)}{x^i}$ eine Parameterdarstellung der Kurvenstücke

$C \subset V_n$, $\tilde C \subset \tilde V_n$ durch P_0 bzw. $\tilde P_0$. Ein Paar von Vektoren $\underset{(0)}{u}^i, \underset{(0)}{v}^i$ sei in P_0 gegeben, und mittels (10) seien die Bildvektoren $\underset{(0)}{\tilde u}^i, \underset{(0)}{\tilde v}^i$ in $\tilde P_0$ erklärt.
$u^i(t), v^i(t)$ mit $u^i(0) = \underset{(0)}{u}^i, v^i(0) = \underset{(0)}{v}^i$ seien zwei Parallelfelder längs C bezüglich $G_{ij}{}^k$. Analog seien $\tilde u^{i*}(t), \tilde v^{i*}(t)$ mit $\tilde u^{i*}(0) = \underset{(0)}{\tilde u}^i, \tilde v^{i*}(0) = \underset{(0)}{\tilde v}^i$ Parallelfelder längs $\tilde C$ bezüglich $\tilde G_{ij}{}^k$.[1]) Dann heißt der Zusammenhang $\tilde G_{ij}{}^k$ konform bezüglich $G_{ij}{}^k :\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{P_0 \in V_n} \quad \bigwedge_{C \text{ durch } P_0} \quad \bigwedge_{\underset{(0)}{u}^i, \underset{(0)}{v}^j \text{ in } P_0} \qquad u^p(t)\, v_p(t) = \tilde u^{p*}(t)\, \tilde v_p^*(t) + o(t)$$

für $t \longrightarrow 0$.

Für konforme Zusammenhänge besteht der

Satz 1.

V_n *und* $\tilde V_n$ *seien* n-*dimensionale reguläre Riemannsche Räume und nach* (10) *sei* V_n *konform auf* $\tilde V_n$ *abgebildet.* $G_{ij}{}^k$ *seien die Komponenten der Übertragung in* V_n. *Die skalare Ortsfunktion* σ *sei mindestens einmal stetig differenzierbar. Dann sind die Komponenten der Übertragung in* $\tilde V_n$, *die konform bezüglich* $G_{ij}{}^k$ *sind, eindeutig bestimmt, und es gilt:*

$$(11) \qquad \tilde G_{ij}{}^k = G_{ij}{}^k + \delta_i^k \sigma_{,j} + \delta_j^k \sigma_{,i} - g_{ij}\, \sigma^k + (e^\sigma - 1)\,(A_{ij}{}^k + A_i{}^k{}_j + A_j{}^k{}_i).$$

Beweis: Nach der Definition wählen wir uns einen beliebigen Punkt $P_0 \in V_n$ mit den Koordinaten $\underset{(0)}{x}^i$. $x^i(t)$ mit $x^i(0) = \underset{(0)}{x}^i$ sei eine Parameterdarstellung eines beliebigen Kurvenstückes C durch P_0 und $\underset{(0)}{u}^i, \underset{(0)}{v}^i$ seien beliebige Vektoren in P_0. Gemäß unserer Definition haben wir die Vektoren $\underset{(0)}{u}^i, \underset{(0)}{v}^i$ längs C in V_n und entsprechend $\underset{(0)}{\tilde u}^i, \underset{(0)}{\tilde v}^i$ längs $\tilde C$ in $\tilde V_n$ parallel zu verschieben. Die Lösungen der sich daraus ergebenden Anfangswertaufgaben

$$(12) \qquad \frac{Du^i}{dt} = 0, \quad \frac{Dv^i}{dt} = 0, \quad \frac{D\tilde u^{i*}}{dt} = 0, \quad \frac{D\tilde v^{i*}}{dt} = 0$$

bezeichnen wir mit $u^i = u^i(t)$, $v^i = v^i(t)$, $\tilde u^{i*} = \tilde u^{i*}(t)$ und $\tilde v^{i*} = \tilde v^{i*}(t)$. Zur Vereinfachung führen wir eine Funktion

$$(13) \qquad F(t) := u_k(t)\, v^k(t) - \tilde u_k^*(t)\, \tilde v^{k*}(t)$$

ein, für die zufolge der Definition des konformen Zusammenhanges

$$(14) \qquad F(t) = o(t)$$

gelten muß. Allgemein haben wir nach der Taylor-Formel

[1]) Das Symbol * soll andeuten, daß die Vektoren $\tilde u^{i*}(t), \tilde v^{i*}(t)$ nicht notwendig die Bildvektoren von $u^i(t)$ und $v^i(t)$ sind.

(15) $F(t) = F(0) + \dot{F}(0)t + o(t)$.

Untersuchen wir nun die ersten beiden Koeffizienten der Taylor-Entwicklung. In P_0 ist nach (10) $\underset{(0)}{\tilde{u}_k} = e^{\sigma}\underset{(0)}{u_k}$ und $\underset{(0)}{\tilde{v}^k} = e^{-\sigma}\underset{(0)}{v^k}$, so daß $F(0) = 0$ gilt. Durch Differentiation von (13) erhält man

$$\dot{F}(t) = \frac{Du_k}{dt}v^k + u_k\frac{Dv^k}{dt} - \frac{D\tilde{u}_k^*}{dt}\tilde{v}^{k*} - \tilde{u}_k^*\frac{D\tilde{v}^{k*}}{dt}.$$

Wegen (4) und (12) ergibt sich zunächst

$$\dot{F}(t) = u^i g_{ik,p}\dot{x}^p v^k - \tilde{u}^{i*}\tilde{g}_{ik,p}\dot{x}^p\tilde{v}^{k*}$$

und für $t=0$ mit (10)

$$\dot{F}(0) = (g_{ik,p} - \tilde{g}_{ik,p}\, e^{-2\sigma})\underset{(0)}{u^i}\underset{(0)}{v^k}\underset{(0)}{\dot{x}^p}.$$

Demnach ist $\dot{F}(0) = 0$ für alle Punkte $P_0 \in V_n$, für alle Kurvenstücke $x^j(t)$ durch P_0 und und für alle Vektoren $\underset{(0)}{u^i}, \underset{(0)}{v^i}$ in P_0 genau dann, wenn die Gleichung

(16) $\tilde{g}_{ij,k} = g_{ij,k}\, e^{2\sigma}$

allgemein gültig ist. Daraus folgt nach (5)

$$\frac{\partial\tilde{g}_{ij}}{\partial x^k} - \tilde{G}_{ik}{}^p\tilde{g}_{pj} - \tilde{G}_{jk}{}^p\tilde{g}_{ip} = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - G_{ik}{}^p g_{pj} - G_{jk}{}^p g_{ip}\right) e^{2\sigma}.$$

Wir berücksichtigen (8), differenzieren partiell nach x^k und bekommen die Beziehung

(17) $(\tilde{G}_{ik}{}^p - G_{ik}{}^p)\, g_{pj} + (\tilde{G}_{jk}{}^p - G_{jk}{}^p)\, g_{ip} = 2\,\sigma_{,k}\, g_{ij}$.

Eine weitere Bedingung erhalten wir, wenn wir zwei infinitesimale Verrückungen d_1x^i, d_2x^i in P_0 betrachten. Verschiebt man einerseits d_1x^i parallel längs d_2x^i, andererseits d_2x^i parallel längs d_1x^i, so bilden die vier Vektoren im allgemeinen kein geschlossenes Viereck. Für die entsprechenden Parallelverschiebungen von d_1x^i, d_2x^i hat man in erster Näherung die Ausdrücke $d_1x^i - G_{pq}{}^i d_1x^p d_2x^q$ bzw. $d_2x^i - G_{qp}{}^i d_2x^q d_1x^p$. Bezeichnen wir den Vektor, der die Lücke schließt, mit $D_{12}^*x^i$, so ist dieser bis auf Größen höherer Ordnung gleich

(18) $D_{12}^*x^i = 2\, A_{pq}{}^i\, d_1x^p\, d_2x^q$,

wobei wir die Definition des Torsionstensors aus (6) eingesetzt haben [4].

Analog verfahren wir in $\tilde{V}_n$ mit den Verrückungen $\widetilde{d_1x^i}, \widetilde{d_2x^i}$, die wir nach (10) ermitteln. Es ergibt sich

(19) $\widetilde{D_{12}^*x^i} = 2\,\tilde{A}_{pq}{}^i\widetilde{d_1x^p}\widetilde{d_2x^q} = 2\,\tilde{A}_{pq}{}^i d_1x^p d_2x^q\, e^{-2\sigma}$.

Da nach der Definition des konformen Zusammenhanges die Längen parallel verschobener Vektoren in V_n und $\tilde{V}_n$ in erster Näherung übereinstimmen, bleibt die Konformität für das Fünfeck im Kleinen genau dann gewahrt, wenn $\widetilde{D_{12}^*x^i} = D_{12}^*x^i\, e^{-\sigma}$ ist.

Diese Gleichung muß für beliebige d_1x^i, d_2x^i richtig sein. Aus diesem Grund folgt durch Einsetzen von (18), (19) die Transformation des Torsionstensors:

$$(20) \qquad \tilde{A}_{ik}{}^p = A_{ik}{}^p e^{\sigma}.$$

Nach (6) können wir (20) auch in der Form

$$\tilde{G}_{ik}{}^p = \tilde{G}_{ki}{}^p + 2\, A_{ik}{}^p e^{\sigma}$$

angeben. Diese Beziehung setzen wir in (17) ein, nehmen anschließend eine Umbenennung $k \longrightarrow h$ vor und erhalten

$$(21) \qquad (\tilde{G}_{hi}{}^p - G_{ih}{}^p)\, g_{pj} + (\tilde{G}_{jh}{}^p - G_{jh}{}^p)\, g_{ip} = 2\, \sigma_{,h}\, g_{ij} - 2\, A_{ih}{}^p\, g_{pj}\, e^{\sigma}.$$

Indem wir (i,j,h) zyklisch vertauschen, ergeben sich zwei weitere Gleichungen. (21) multiplizieren wir mit (–1), addieren alle Gleichungen und, wenn wir die Definition des Torsionstensors aus (6) mehrmals berücksichtigen, ergibt sich

$$2\, \tilde{G}_{ij}{}^p g_{hp} = 2\, G_{ij}{}^p g_{hp} + 2\, (g_{ih}\, \sigma_{,j} + g_{hj}\, \sigma_{,i} - g_{ij}\, \sigma_{,h}) + 2\, (e^{\sigma} - 1)\, (A_{ij}{}^p g_{ph} + A_{ih}{}^p g_{pj} + A_{jh}{}^p g_{pi}).$$

Überschiebung mit $\frac{1}{2}\, g^{hk}$ liefert schließlich die eindeutige Lösung (11). Dieses wollten wir zeigen.

Besonders einfach lassen sich die Transformationsgleichungen für metrische Zusammenhänge darstellen. Hierfür gilt

Satz 2.

$V_n, \tilde{V}_n$ mit den Zusammenhängen $G_{ij}{}^k, \tilde{G}_{ij}{}^k$ seien reguläre, konforme Riemannsche Räume im Sinne unserer Definition. Dann gilt

(A) $G_{ij}{}^k$ *metrisch* $\Leftrightarrow$ $\tilde{G}_{ij}{}^k$ *metrisch*

(B) $G_{ij}{}^k$ *metrisch* $\Leftrightarrow$

$$(22) \qquad \tilde{G}_{ij}{}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}{}^k + (G_{ij}{}^k - \Gamma_{ij}{}^k)\, e^{\sigma}.$$

Beweis: (A) folgt unmittelbar aus (16).
Zu (B): Für metrische Übertragungen gilt nach (5) die Gleichung

$$\frac{g^{kp}}{2}\, (g_{pj.i} + g_{ip.j} - g_{ji.p}) = 0,$$

in die wir die entsprechenden Ausdrücke für die kovarianten Ableitungen des Maßtensors nach (5) einsetzen. Es ergibt sich dann, wenn wir die Definition des Torsionstensors aus (6) verwenden, für metrische Zusammenhänge wegen (7) die zu (5) äquivalente Beziehung

$$(23) \qquad \Gamma_{ij}{}^k = S_{ij}{}^k - A_i{}^k{}_j - A_j{}^k{}_i.$$

Dabei wurde $S_{ij}{}^k := \frac{1}{2}\, (G_{ij}{}^k + G_{ji}{}^k)$ gesetzt. Also ist nach (6) $G_{ij}{}^k = S_{ij}{}^k + A_{ij}{}^k$ und wir bekommen wegen (23)

$$A_{ij}{}^k + A_i{}^k{}_j + A_j{}^k{}_i = G_{ij}{}^k - S_{ij}{}^k + A_i{}^k{}_j + A_j{}^k{}_i = G_{ij}{}^k - \Gamma_{ij}{}^k.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (11) ein, und subtrahieren wir von (11) noch die Gleichung (9), so bleibt

$$\tilde{G}_{ij}{}^{k} - \tilde{\Gamma}_{ij}{}^{k} = (G_{ij}{}^{k} - \Gamma_{ij}{}^{k})\, e^{\sigma},$$

was zu zeigen war.

Zum Schluß wollen wir noch eine Invarianzeigenschaft angeben, die aus dem Krümmungstensor folgt. Bezeichnen wir die Komponenten dieses Tensors auf $\tilde{V}_n$ mit $\tilde{R}^{h}{}_{ijk}$, so ist bekanntlich

$$(24) \qquad \tilde{R}^{h}{}_{ijk} = \frac{\partial \tilde{G}_{ik}{}^{h}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \tilde{G}_{ij}{}^{h}}{\partial x^{k}} + \tilde{G}_{pj}{}^{h} \tilde{G}_{ik}{}^{p} - \tilde{G}_{pk}{}^{h} \tilde{G}_{ij}{}^{p},$$

und es gilt

Satz 3.

V_n und $\tilde{V}_n$ seien konform aufeinander abgebildet. Beide Räume seien mit Zusammenhängen $G_{ij}{}^{k}$ und $\tilde{G}_{ij}{}^{k}$ ausgestattet. Die Funktion $\sigma(x^{i})$ sei mindestens zweimal stetig differenzierbar. Ist dann $\tilde{G}_{ij}{}^{k}$ in $\tilde{V}_n$ konform bezüglich $G_{ij}{}^{k}$, so gilt

$$\tilde{R}^{h}{}_{hjk} = R^{h}{}_{hjk}.$$

Beweis: Durch Verjüngung $h = i$ in (24) finden wir

$$(25) \qquad \tilde{R}^{h}{}_{hjk} = \frac{\partial \tilde{G}_{hk}{}^{h}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \tilde{G}_{hj}{}^{h}}{\partial x^{k}}.$$

Anschließend überschieben wir die Gleichung (17) mit g^{ij}, das liefert, wenn wir die Umbenennung $k \longrightarrow j$ vornehmen und berücksichtigen, daß $g^{ij} g_{ij} = \delta_i{}^{i} = n$ ist, die Formel

$$\tilde{G}_{hj}{}^{h} - G_{hj}{}^{h} = n\sigma_{,j}.$$

aus der folgt, daß $\tilde{G}_{hj}{}^{h} = G_{hj}{}^{h} + n\sigma_{,j}$ und $\tilde{G}_{hk}{}^{h} = G_{hk}{}^{h} + n\sigma_{,k}$ ist. Die letzten beiden Beziehungen setzen wir in (25) ein und erhalten

$$\tilde{R}^{h}{}_{hjk} = \frac{\partial G_{hk}{}^{h}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial G_{hj}{}^{h}}{\partial x^{k}} + n \left(\frac{\partial \sigma_{,k}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \sigma_{,j}}{\partial x^{k}} \right) = R^{h}{}_{hjk},$$

weil nach Voraussetzung über $\sigma(x^{i})$ $\dfrac{\partial \sigma_{,k}}{\partial x^{j}} - \dfrac{\partial \sigma_{,j}}{\partial x^{k}} = 0$ ist. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Literatur

[1] EISENHART, L. P.: Riemannian geometry. Princeton 1949, 2. Aufl., S. 89.

[2] LAUGWITZ, D.: Differentialgeometrie. Stuttgart 1968, 2. Aufl., S. 79, 95.

[3] MODESITT, V.: Some singular properties of conformal transformations between Riemannian spaces. In: American journal mathematics, Bd. 60, 1938, S. 325.

[4] SCHOUTEN, J. A.: Ricci-Calculus, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 10. Berlin 1954, S. 127.